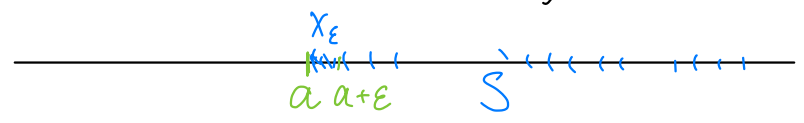


Rappel: L'infimum et le supremum d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$.

Si $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

- (1) $a \leq x \quad \forall x \in S$
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in S : x_\varepsilon - a \leq \varepsilon$

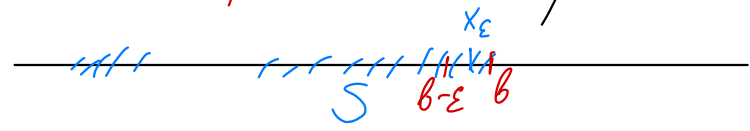
Alors $a = \inf S$ (la borne inférieure de S)



Si $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ et $b \in \mathbb{R}$ est tel que

- (1) $b \geq x \quad \forall x \in S$
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in S : b - x_\varepsilon \leq \varepsilon$

Alors $b = \sup S$ (la borne supérieure de S)



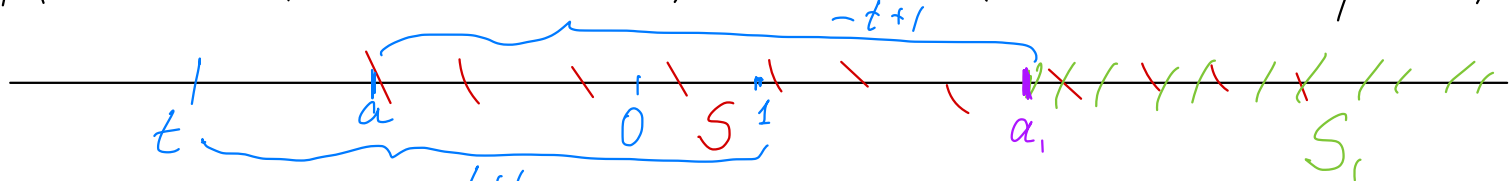
Axiome: Tout sous-ensemble non-vidé $S \subset \mathbb{R}_+^*$ (réels positifs) admet une borne inférieure.

Thm Tout sous-ensemble non-vidé majoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un supremum qui est unique.

Tout sous-ensemble non-vidé minoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un infimum qui est unique.

Dém: (a) Si $S \subset \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}, a = \inf S$ par l'axiome.

(b) $S \subset \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R} : x \geq t \quad \forall x \in S$, mais $t \leq 0$ (S est minoré par $t, t \leq 0$).



Soit $S_1 = \{x - t + 1, x \in S\} \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$ Par l'axiome de la borne inférieure,

il existe $a_1 = \inf S_1$. Alors $a = a_1 + t - 1 = \inf S$:

- (1) $\forall x \in S \Rightarrow \underbrace{x - t + 1}_{\in S_1} \geq a_1 \Rightarrow \underbrace{x}_{\in S} \geq a_1 + t - 1 = a$;
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in S : \underbrace{y - t + 1}_{\in S_1} - a_1 \leq \varepsilon \Rightarrow \underbrace{y}_{\in S} - \overbrace{(a_1 + t - 1)}^a \leq \varepsilon$

(c) Soit $S \subset \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} : x \leq p \quad \forall x \in S : S$ est majoré par $p \in \mathbb{R}$ -23-

Considérons $S_2 = \{y \in \mathbb{R} : y = -x, x \in S\}$

$\Rightarrow S_2$ est minoré par $-p \in \mathbb{R}$

Par (b) $\exists a_2 = \inf S_2 \Rightarrow$ Alors $a = -a_2 = \sup S$ (vérifier les propriétés du supremum) 

Unicité Si $\inf S$ existe, alors il est le plus grand minorant de S .

Si $\sup S$ existe, alors il est le plus petit majorant de S .

En particulier, $\inf S$ et $\sup S$ sont uniques (s'ils existent).

Idee: par absurde: Supposons qu'il existe $\sup S$ et $b \in \mathbb{R} : b < \sup S$,
et b est un majorant de S

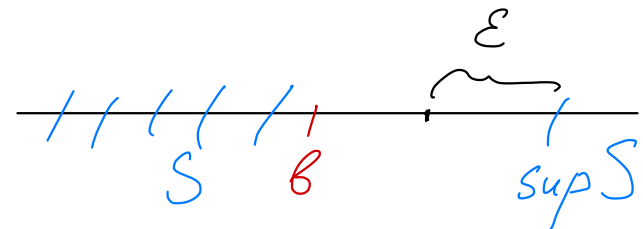
$$\exists \varepsilon = \frac{\sup S - b}{2} \Rightarrow \sup S - \varepsilon > b \geq x \quad \forall x \in S$$

$\Rightarrow \sup S - x > \varepsilon \quad \forall x \in S$ - contredit
la déf de $\sup S$.

$\Rightarrow \sup S$ est le plus petit majorant de S

$\Rightarrow$ le $\sup S$ est unique.

Le cas de l'infimum est symétrique



Notation intervalles.

Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

-24-

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b] \text{ intervalle fermé borné}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[\text{ intervalle ouvert borné}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[\text{ intervalle semi-ouvert borné}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b] \text{ — " —}$$

$-\infty$ et ∞ , $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle achevée ; $-\infty < x < \infty$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Intervalles non-bornés

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[\text{ fermé}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b] \text{ fermé}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[\text{ ouvert}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[\text{ ouvert}$$

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[= \{x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0] = \{x \leq 0\}, \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[= \{x < 0\}$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

[DZ § 1.15, 1.5.1, 1.5.3]

Comment trouver $\sup S$, $\inf S$ pour un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ donné?

-25-

Exemple. (1) Intervalles bornés.

$$\sup[a, b] = \sup]a, b[= \sup[a, b[= \sup]a, b] = b$$

$$\inf[a, b] = \inf]a, b[= \inf[a, b[= \inf]a, b] = a.$$

Dém: (a) $\sup[a, b] = b$ (1) $b \geq x \quad \forall x \in [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ Vrai

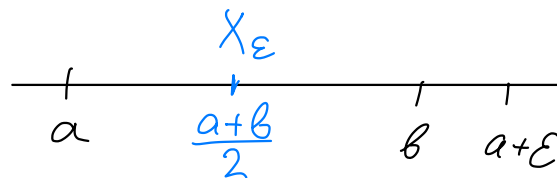
(2) Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow x_\varepsilon \in [a, b] : b - x_\varepsilon \leq \varepsilon \Rightarrow$ on peut prendre $x_\varepsilon = b \Rightarrow$
 $b - b = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$ Vrai
 $\Rightarrow b = \sup[a, b]$

(b) $\inf]a, b[= a$ (1) $a \leq x \quad \forall x \in]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver $x_\varepsilon \in]a, b[: x_\varepsilon - a \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} a < x_\varepsilon < b \\ x_\varepsilon \leq a + \varepsilon \end{cases}$

Si $\varepsilon < b - a \Rightarrow$ on prend $x_\varepsilon = a + \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} a < a + \varepsilon < b \\ a < a + \varepsilon \leq a + \varepsilon \end{cases}$

Si $\varepsilon \geq b - a \Rightarrow x_\varepsilon = \frac{b+a}{2} \Rightarrow \begin{cases} a < \frac{a+b}{2} < b \\ a < \frac{a+b}{2} < b \leq a + \varepsilon \end{cases}$ Vrai



Thm. Propriété d'Archimède Pour tout couple (x, y) de nombres réels tel que $x > 0$ et $y \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$ -26-

Dém: (1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré. Par absurde: supposons que $\mathbb{N}$ est majoré

Alors $\exists x = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$, et pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists n \in \mathbb{N} : \sup \mathbb{N} - n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\sup \mathbb{N} \leq n + \frac{1}{2} < \underbrace{n+1}_m \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup \mathbb{N} < \sup \mathbb{N}$ absurde $\Rightarrow \mathbb{N}$ n'est pas majoré.

(2) Soit $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}_+$, alors $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{y}{x} \Leftrightarrow nx > y$ □

Donc $\mathbb{R}$ est un corps archimédien.

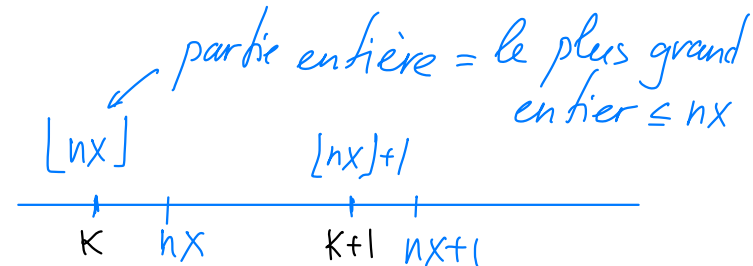
Thm $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Dém: Par la propriété d'Archimède $\exists n \in \mathbb{N}^* : n(y-x) > 1 \Rightarrow y-x > \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow x < x + \frac{1}{n} < y$$

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \leq \frac{nx+1}{n} < y$$

$$\Rightarrow r = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \in \mathbb{Q} \text{ et } x < r < y.$$



-27-

Exercice: Soient $r < q$, $r, q \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $r < x < q$.
irrational

($\Rightarrow \forall x < y, x, y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < z < y$) [DZ, §1.3.+]

Ex (2) $S = \{x > a\} =]a, \infty[: \exists \inf S = a$ (voir Ex 1) $\sup S$ n'existe pas

Ex (3) $S = \left\{ \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$

$$(1) \frac{3n-2}{n} = 3 - \frac{2}{n} ; \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3 - \frac{2}{n+1} > 3 - \frac{2}{n}$$

$\Rightarrow \left\{ \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est croissante $\Rightarrow n=1$ on a $3 - \frac{2}{1} = 1$

$\Rightarrow S$ est minoré : $1 \leq x \quad \forall x \in S \Rightarrow \inf S$ existe.

$\inf S = 1 \Rightarrow (1) 1 \leq x \quad \forall x \in S$ Vrai (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x = 1 : x - 1 = 1 - 1 = 0 \leq \varepsilon$ Vrai
 $\Rightarrow \inf S = 1$.

(2) S est majoré? Oui : $3 \geq 3 - \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sup S$ existe.

Il faut démontrer que $\sup S = 3$.

(1) $3 > x \quad \forall x \in S : 3 > 3 - \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer l'existence de $x_\varepsilon \in S : 3 - x_\varepsilon \leq \varepsilon$

$$3 - \left(3 - \frac{2}{n}\right) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} \leq n, n \in \mathbb{N}^*$$

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, il existe $n \in \mathbb{N}^* : n \geq \frac{2}{\varepsilon}$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Vrai

$\Rightarrow \sup S = 3 ; 3 \notin S$.



Remarque Si $\inf S \in S$, on dit que S possède un minimum,
 $\min S = \inf S$ dans ce cas.

Si $\sup S \in S$, on dit que S possède un maximum,
 $\max S = \sup S$ dans ce cas.

Ex3 $\min S = 1$, S ne possède pas de maximum.